Mathématiques financières usuelles

L. R.*

Le 9 *septembre* 2009

1. Introduction

L'objectif de ce court document est de montrer l'importance de certaines notions mathématiques pour les calculs financiers élémentaires les plus courants. Bien sûr, certains sites sur Internet (comme `http ://www.calcul-credit.com`) font des calculs en ligne, mais ils ne précisent pas les formules utilisées. Or le plus important pour le commun des mortels est de pouvoir prévoir l'étalement de sa charge financière en fonction de ses besoins et de ses envies. Il vaut donc mieux connaître les principes de base qui permettent, le cas échéant, de dire à son banquier ce qu'il doit faire, en inversant les rôles d'usage.
Ce document peut admettre alors deux types de lecture : celle consistant à puiser uniquement des informations sur les calculs financiers, et l'autre, complète, incluant la notion mathématique de *suite*, dont le rôle est ici essentiel.
Pour un usage courant cette dernière notion est évidemment superflue, mais « pour l'honneur de l'esprit humain » il serait quand même bon que la curiosité intellectuelle l'emporte sur la satiété mercantile, d'autant que l'étude approfondie de la notion de suite nous conduira à celles d'*exponentielle* et de *logarithme*.

2. Intérêts et suites

Pour les calculs financiers on a l'habitude de noter i le taux d'intérêt pour éviter de traîner comme un boulet un coefficient $1/100$ dans toutes les formules. En adoptant la convention que

$$\boxed{\% = 0,01 = 1/100}$$

Il est alors facile de comprendre que $7\ \% = 0,07$ par exemple, et que d'une manière générale

$$\boxed{t\ \% = 0,01 \cdot t = i}$$

2.1 Intérêts simples, suites arithmétiques

Lorsqu'on travaille sur le court terme (moins d'un an) on calcule les intérêts avec une règle de proportionnalité et on parle alors d'*intérêts simples*.

*Professeur agrégé de Mathématiques

2.1.1 Intérêts simples

Ainsi, lorsque i_a est le taux d'intérêt annuel, C le capital concerné et d la durée du placement en jours, les intérêts I_d sont calculés comme suit :

$$\boxed{I_d = \frac{i_a}{360} \cdot d \cdot C}$$

Remarque. Comme une année ne fait ici que 360 jours[1], elle est donc sous-estimée. Le taux d'intérêt réel est donc surestimé[2].

En posant $i = i_a/360$ (taux journalier), on obtient la relation simple suivante :

$$I_{d+1} = I_d + i \cdot C.$$

Ainsi, de jour en jour, les intérêts augmentent de la même quantité $(i \cdot C)$. On dit que la suite des nombres I_d, lorsque d varie de 1 à 360, forme une *progression arithmétique*. Mais les intérêts s'ajoutant au capital C, la *valeur acquise* par le capital C au bout de d jours est alors $C_d = C + I_d$, c'est à dire

$$\boxed{C_d = (1 + i \cdot d) \cdot C}$$

On remarque alors qu'on a

$$C_{d+1} = C_d + i \cdot C.$$

Ainsi la suite des nombres C_d, lorsque d varie de 1 à 360, forme aussi une progression arithmétique. Cette notion de « progression » peut maintenant être généralisée.

2.1.2 Suites

En mathématiques, on parle de *suite* plutôt que de progression. Un telle suite est génériquement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais de nos jours, au lycée, on omet l'indexation en supposant alors nécessairement que n peut prendre toute valeur entière $(n \in \mathbb{N})$; la suite est alors notée simplement (u_n).

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est le *successeur* de u_n.

Par exemple, dans le cas des intérêts simples, on note (I_d) la suite associée, en envisageant alors toutes les valeurs possibles pour d, au lieu de se limiter à $d \in [\![0 ; 360]\!]$.

Le premier terme de (u_n) est donc u_0, et son successeur u_1 est le second terme de la suite.

2.1.3 Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est caractérisée par la valeur constante de $u_{n+1} - u_n$, appelée *raison* de la suite. Cette raison r permet alors de caractériser une suite arithmétique selon trois modalités équivalentes :

[1] historiquement, pour simplifier les calculs.
[2] Le lecteur est alors invité à déterminer le taux réel appliqué...

① $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} - u_n = r}$

② $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = u_n + r}$

③ $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad u_n = u_0 + n \cdot r}$

Exemples. Dans chacun des cas suivants, la suite (u_n) est arithmétique, même si les apparences sont trompeuses[3].

1. $u_n = \dfrac{2-3n}{12}$.
2. $u_n = \dfrac{2-3n^2}{12} + (0,5n+4)^2$.
3. $u_n = (1,5-5n)^2 + 11n^2 - (6n-1)^2$.
4. $u_n = \dfrac{2n^2+8n+7,5}{n+1,5}$.

2.2 Intérêts composés, suites géométriques

Lorsque l'on travaille sur le long terme (au moins un an) on découpe le temps en périodes égales (d'un jour, un mois, un trimestre ou un an) et on calcule les intérêts pour chaque période sur la valeur acquise par le capital à la période précédente. On parle alors d'*intérêts composés*. On note i le taux (supposé constant) pour chaque période, en conformité avec la notation adoptée précédemment pour un taux journalier (voir § 2.1.1).

2.2.1 Formules de récurrence

Mettons le principe énoncé précédemment en évidence sur les suites (I_n) et (C_n) où

→ I_n désigne les intérêts acquis à la fin de la période n ;

→ C_n désigne la valeur acquise par le capital en fin de période n.

On a donc successivement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

① $\boxed{I_{n+1} = I_n + i \cdot C_n}$

② $\boxed{C_{n+1} = (1+i) \cdot C_n.}$

Ces égalités expriment comment déterminer le successeur de chaque terme des deux suites, mais ne donne pas de formule exprimant un terme général en fonction de n : on dit que l'on a défini ces suites *par récurrence*.
C'est fâcheux pour aborder chaque suite d'un coup, sans être obligé de calculer tous les intermédiaires pour obtenir celui d'indice n. L'affaire est donc bien plus compliquée qu'avec les intérêts simples : il devient nécessaire de procéder lentement et méthodiquement.
Les premières valeurs sont évidemment : $C_0 = C$ et $I_0 = 0$ ...

[3] d'où la nécessité de pouvoir caractériser une suite arithmétique autrement que par une forme stéréotypée.

2.2.2 Étude de deux suites

On a donc successivement :

$$\left| \begin{array}{lll} C_1 = (1+i)\cdot C_0 & \text{soit} & C_1 = (1+i)\cdot C\ ; \\ C_2 = (1+i)\cdot C_1 & \text{donc} & C_2 = (1+i)^2\cdot C\ ; \\ C_3 = (1+i)\cdot C_2 & \text{donc} & C_3 = (1+i)^3\cdot C. \end{array} \right.$$

Il est clair que l'on a finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad C_n = (1+i)^n \cdot C}$$

On dit que la suite (C_n) est une *suite géométrique* de raison $1+i$. On peut aussi écrire successivement :

$$\left| \begin{array}{lll} I_1 = I_0 + i\cdot C_0 & \text{soit} & I_1 = i\cdot C_0\ ; \\ I_2 = I_1 + i\cdot C_1 & \text{donc} & I_2 = i\cdot(C_0+C_1)\ ; \\ I_3 = I_2 + i\cdot C_2 & \text{donc} & I_3 = i\cdot(C_0+C_1+C_2). \end{array} \right.$$

Il est clair que l'on a finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{I_n = i\cdot(C_0 + \cdots + C_{n-1})} \tag{1}$$

soit encore

$$I_n = i\cdot(1 + \cdots + (1+i)^{n-1})\cdot C \tag{2}$$

Cette dernière égalité n'est pas vraiment intéressante puisqu'elle fait intervenir une somme de n termes qu'il semble falloir tous calculer avant d'obtenir celui d'indice n. La précédente présente le même inconvénient, mais fait apparaître clairement la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.
Il est donc temps de s'intéresser à de telles suites, dans le cas général.

2.2.3 Suites géométriques

Une suite géométrique est caractérisée par la valeur constante de u_{n+1}/u_n, appelée *raison* de la suite (on suppose donc qu'aucun terme de la suite n'est nul). Cette raison r permet de caractériser une suite géométrique selon trois modalités équivalentes :

① $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1}/u_n = r}$

② $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = u_n \cdot r}$

③ $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad u_n = u_0 \cdot r^n}$

Exemples. Dans chacun des cas suivants, la suite (u_n) est géométrique, même si les apparences sont trompeuses[4].

1. $u_n = \sqrt{3^n}$.
2. $u_n = \dfrac{(-3)^{2n+4}}{12^n}$.
3. $u_n = \dfrac{2^{n+3} + 0,5^{2n-3}}{8^n + 1}$.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer une formule qui permet de calculer simplement la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

[4] d'où la nécessité de pouvoir caractériser une suite géométrique autrement que par une forme stéréotypée.

Remarque. Les suites constantes peuvent être vues comme des suites arithmétiques de raison 0, ou bien comme des suites géométriques de raison 1. Elles n'offrent donc pas beaucoup d'intérêt, mais on ne les exclut pas des définitions pour autant[5]. Le lecteur intéressé pourra chercher à démontrer que seules les suites constantes sont à la fois arithmétiques et géométriques.

3. Somme de termes successifs d'une suite

3.1 Somme des n premiers termes

Nous savons (voir l'égalité (1) page 4) que le calcul des intérêts composés nous conduisait à déterminer la somme, notée désormais S_n, des n premiers termes d'une suite géométrique. Nous allons établir une formule de sommation dans le cas général, que nous appliquerons ensuite au calcul des intérêts composés.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison r $(r \neq 1)$: $u_n = u_0 \cdot r^n$.
On a donc (pour $n \geq 1$) :

$$S_n = u_0 + u_0 \cdot r^1 + \cdots + u_0 \cdot r^{n-1}$$

c'est à dire aussi

$$S_n = u_0 \cdot (1 + r + \cdots + r^{n-1})$$

Mais alors on a :

$$r \cdot S_n = u_0 \cdot (r + r^2 + \cdots + r^n)$$

d'où

$$\begin{aligned} r \cdot S_n - S_n &= u_0 \cdot ((r + r^2 + \cdots + r^n) - (1 + r + \cdots + r^{n-1})) \\ &= u_0 \cdot (r^n - 1) \end{aligned}$$

On en déduit, pour $\boxed{r \neq 1}$:

$$\boxed{S_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}\, u_0}$$

On note que cette égalité peut aussi être avantageusement écrite comme suit :

$$\boxed{S_n = \frac{r \cdot u_{n-1} - u_0}{r - 1}}$$

Bien entendu notre curiosité naturelle nous incite à savoir si l'on ne peut déterminer des formules synthétiques pour la somme, notée aussi S_n, des n premiers termes d'une suite arithmétique.

Soit donc (a_n) une suite arithmétique de raison r : $a_n = a_0 + n \cdot r$.
On a donc (pour $n \geq 1$) :

$$S_n = a_0 + (a_0 + r) + \cdots + (a_{n-1} - r) + a_{n-1}$$

c'est à dire aussi

$$S_n = a_{n-1} + (a_{n-1} - r) \cdots + (a_0 + r) + a_0$$

[5] sauf la suite constante nulle, exclue des suites géométriques.

Mais alors, en utilisant les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n + S_n &= (a_0 + a_{n-1}) + (a_0 + r + a_{n-1} - r) + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_{n-1} - r + a_0 + r) + (a_{n-1} + a_0) \\ &= n \cdot (a_0 + a_{n-1}) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{S_n = n\,\frac{a_0 + a_{n-1}}{2}}$$

C'est à dire que S_n est aussi la somme de n termes identiques à la moyenne du premier terme (a_0) et du dernier terme (a_{n-1}) de la somme.

3.2 Cas général

Soit donc (a_n) une suite arithmétique de raison r.

En posant $w_n = a_{j+n}$ on définit une suite arithmétique de premier terme a_j et de raison r. On a donc $w_0 = a_j$ et $w_{k-j} = a_k$.
Ainsi la somme des termes successifs de (a_n), pour les indices variant de j à k, est la somme des $k - j + 1$ premiers termes de (w_n) ; ce qui nous permet d'appliquer le résultat précédent.
D'où la formule générale :

$$\boxed{\begin{aligned} a_j + a_{j+1} + \cdots + a_k &= n\,\frac{a_j + a_k}{2} \\ \text{avec} \quad n &= k - j + 1 \end{aligned}}$$

Remarque. Lorsque $r \neq 0$ on peut calculer n à l'aide de a_j et a_k :

$$\boxed{n = \frac{a_k - a_j}{r} + 1}$$

En faisant de même avec une suite géométrique (g_n) on obtient la formule générale :

$$\boxed{g_j + g_{j+1} + \cdots + g_k = \frac{r \cdot g_k - g_j}{r - 1}}$$

3.3 Application aux intérêts composés

On reprend la suite (I_n) du § 2.2.1 :

$$I_n = i \cdot (C_0 + \cdots + C_{n-1})$$

On applique alors les formules du § 3.1 :

$$I_n = i \cdot \frac{(1+i) \cdot C_{n-1} - C_0}{(1+i) - 1}$$

soit encore

$$I_n = i \cdot \frac{C \cdot (1+i)^n - C}{i}$$

d'où, finalement :

$$I_n = C \cdot (1+i)^n - C = C_n - C$$

C'est à dire, tout simplement : I_n est la différence entre la valeur acquise par le capital et le capital initial. Ce résultat est bien cohérent avec la notion d'intérêt, qui s'ajoute au capital ! Ainsi il n'y a pas vraiment de formule à retenir pour les intérêts composés, mais seulement celle pour C_n, la valeur acquise par le capital.

3.4 Application au calcul d'annuités

Lorsqu'on emprunte un capital avec des remboursements échelonnés on rembourse en fait une somme qui ne rembourse que partiellement le capital. Nous allons voir le principe des remboursements échelonnés dans deux cas particulier avant de généraliser.

3.4.1 Remboursement en deux fois

Soit un emprunt de C euros au taux par période noté i. Supposons que l'on fasse un premier remboursement de R_1 euros au bout d'une période, le restant (R_2 euros) étant payé au bout de la seconde période. Alors :

① La valeur acquise par l'emprunt au bout d'une période est : $(1+i) \cdot C$;

② juste après le remboursement, le capital restant dû est donc

$$C_1 = (1+i)\,C - R_1,$$

et c'est lui qu'il faut rembourser à la seconde et dernière étape ;

③ on a donc enfin

$$\begin{aligned} R_2 &= (1+i)\,C_1 \\ &= (1+i)^2\,C - (1+i)\,R_1. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité peut être écrite aussi :

$$R_2 + (1+i)\,R_1 = (1+i)^2\,C$$

d'où finalement, en divisant par $(1+i)^2$:

$$\frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_1}{1+i} = C$$

soit encore, pour faire apparaître la décomposition de C dans l'ordre de remboursements :

$$\boxed{C = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2}}$$

3.4.2 Remboursement en trois fois

Soit un emprunt de C euros au taux par période noté i. Supposons que l'on fasse un premier remboursement de R_1 euros au bout d'une période, le second (R_2 euros) à la fin de la seconde période, et le restant (R_3 euros) étant payé au bout de la troisième période. Alors, en notant C_n le capital restant dû en fin de période n, on a successivement :

$$\begin{array}{r|rcl} ① & C_1 & = & (1+i)\,C - R_1 \\ ② & C_2 & = & (1+i)\,C_1 - R_2 \\ ③ & C_3 = 0 & = & (1+i)\,C_2 - R_3 \end{array}$$

On en déduit successivement :

$$\begin{array}{r|rcl} \text{avec } ③ & R_3 & = & (1+i)\,C_2 \\ \text{avec } ② & & = & (1+i)^2\,C_1 - (1+i)\,R_2 \\ \text{avec } ① & & = & (1+i)^3\,C - (1+i)^2\,R_1 - (1+i)\,R_2 \end{array}$$

Cette dernière égalité peut être écrite aussi :

$$R_3 + (1+i)\,R_2 + (1+i)^2\,R_1 = (1+i)^3\,C$$

d'où finalement, en divisant par $(1+i)^3$ puis en changeant l'ordre d'écriture pour faire apparaître la décomposition de C dans l'ordre de remboursements :

$$\boxed{C = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_3}{(1+i)^3}}$$

3.4.3 Remboursement en n fois, actualisation

Avec les deux études précédentes il devient clair que pour un remboursement en n échéances du capital C emprunté, on a la formule générale

$$\boxed{C = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^n}}$$

où R_k désigne la somme remboursée en fin de période k.
D'autre part, si C_k désigne le capital restant dû en fin de période k, on a $C_k = (1+i)\,C_{k-1} - R_k$. Donc, de proche en proche, on en conclut que

$$\boxed{C_k = (1+i)^k \cdot \left(C - \frac{R_1}{1+i} - \frac{R_2}{(1+i)^2} - \cdots - \frac{R_k}{(1+i)^k}\right)}$$

Cette dernière expression peut paraître compliquée au premier abord, alors qu'elle est remarquablement simple et logique, pour peu que l'on y porte un regard attentif.

En effet, d'une part on note que $R_k/(1+i)^k$ représente le capital qu'il faut placer en intérêts composés pendant k périodes pour obtenir R_k ; on a simplement :

$$(1+i)^k \cdot \frac{R_k}{(1+i)^k} = R_k.$$

En quelque sorte on remonte le temps pour connaître la valeur originelle de R_k pour obtenir la *valeur actualisée* de R_k, en prenant comme référence la date de l'emprunt. D'autre part on note que le coefficient $(1+i)^k$ donne la valeur acquise après k périodes par le capital initial diminué des remboursements actualisés.

3.4.4 Annuités constantes

D'après ce qui précède on peut étudier le cas des remboursements constants, c'est à dire lorsque pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$ on a $R_k = A$, où le nombre constant A est appelé *annuité*. Il nous suffit d'appliquer la formule de sommation des termes successifs d'une suite géométrique (voir § 3.2).
En effet, on pose

$$u_k = \frac{A}{(1+i)^k} = (1+i)^{-k}\, A = A \cdot \left((1+i)^{-1}\right)^k$$

Comme (u_k) est une suite géométrique de premier terme A et de raison $r = (1+i)^{-1}$ on a :

$$u_1 + \cdots + u_n = \frac{r \cdot u_n - u_1}{r-1}$$

c'est à dire

$$C = \frac{(1+i)^{-1}(1+i)^{-n} - (1+i)^{-1}}{(1+i)^{-1} - 1}\, A$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par $1+i$ on obtient :

$$C = \frac{(1+i)^{-n} - 1}{1-(1+i)}\, A = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\, A$$

D'où

$$\boxed{A = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\, C}$$

Cette formule est classiquement appliquée dans les cas d'emprunts avec remboursements mensuels. Comme le taux utilisé est celui pour une période (un mois ici), il faut savoir déterminer $1 + i_m$ lorsqu'on connaît $1 + i_a$, seule valeur contractuellement définie. C'est l'objet des paragraphes suivants.

4. Taux actuariel, puissances d'un nombre

4.1 Taux proportionnel, taux équivalent

Nous savons (voir § 2.1.1) que les intérêts simples sont calculés pour d jours par

$$I_d = i \cdot d \cdot C$$

où i est le taux journalier, égal à $i_a/360$. Ainsi, pour une durée de 30 jours, par exemple, les intérêts seront de

$$I_{30} = i \cdot 30 \cdot C = (30i) \cdot C$$

Donc le taux mensuel est égal à $30i$, c'est à dire finalement $i_a/12$. C'est ce qu'on appelle le *taux mensuel proportionnel*, ce qu'on note :

$$\boxed{i_m = \frac{i_a}{12}}$$

En revanche, pour les intérêts composés, sur n périodes on a :

$$I_n = ((1+i)^n - 1) \cdot C$$

Donc le taux d'intérêt sur n périodes est égal à $(1+i)^n - 1$, où i est le taux d'intérêt par période. C'est ce qu'on appelle le *taux actuariel*. Donc si la période est d'un mois (cas le plus fréquent), on peut écrire :

$$i_a = (1+i_m)^{12} - 1$$

De même si la période est d'un jour, on a (pour une année de 365 jours) :

$$i_a = (1+i_j)^{365} - 1$$

On préfère utiliser ces relations sous une forme plus symétrique, faisant directement intervenir la raison r de la suite géométrique (C_n) :

$$\boxed{\begin{array}{rcl|c} 1+i_a & = & (1+i_m)^{12} & \text{ici } r = 1+i_m \\ 1+i_a & = & (1+i_j)^{365} & \text{ici } r = 1+i_j \end{array}}$$

En pratique seul le taux annuel i_a est connu, et on cherche plutôt à calculer la raison de (C_n). Alors le seul moyen de la calculer est d'utiliser les puissances d'exposant fractionnaire.

4.2 Puissances d'exposant fractionnaire

Si on imagine le cas général de p périodes par an, avec un taux par période noté i, on a la relation :

$$1 + i_a = (1+i)^p$$

On est finalement conduit à rechercher le nombre r tel que $r^p = 1 + i_a$.

Par extension de la racine carrée et de la racine cubique, on définit la « racine p−ième » d'un nombre $x \geq 0$ comme étant le nombre $r \geq 0$ dont la puissance d'exposant p est x. On admet que ce nombre réel existe et est unique ; il est noté $\sqrt[p]{x}$.
On retient alors, pour $x \geq 0$ et $r \geq 0$:

$$\boxed{r^p = x \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[p]{x}}$$

En fait on préfère noter $\sqrt[p]{x}$ sous une forme plus pratique, avec un exposant fractionnaire :

$$\boxed{r^{1/p} \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt[p]{x}}$$

Désormais nous utiliserons cette notation et admettrons que toutes les formules usuelles avec les puissances d'exposant entier sont valables avec des exposants fractionnaires, la plus importante étant la suivante :

$$\boxed{r^{a \cdot b} = \left(r^a\right)^b = \left(r^b\right)^a}$$

Donc on peut écrire en particulier

$$\boxed{r^{q/p} = \left(r^{1/p}\right)^q = \left(r^q\right)^{1/p}}$$

Exemple d'utilisation. Si on place un capital de 15000 euros à un taux annuel de 3,8 %, alors le capital obtenu au bout de 3 ans et 142 jours est de $1,038^{3+142/365} \cdot 15000$ euros, c'est à dire environ 17021 euros.

On en déduit donc maintenant les taux (actuariels) mensuels et journaliers équivalents à un un taux annuel donné :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} i_m & = & (1+i_a)^{1/12}-1 \\ i_j & = & (1+i_a)^{1/365}-1 \end{array}}$$

Exemple. Si le taux annuel est de 3,6 % (soit $i_a = 0,036$), alors les taux mensuels et journaliers équivalents sont respectivement

$$1,036^{1/12}-1 \quad \text{et} \quad 1,036^{1/365}-1,$$

c'est à dire :

$$i_m \approx 0,002952 \quad \text{et} \quad i_j \approx 0,0000969,$$

ou encore

$$i_m \approx 0,2952\,\% \quad \text{et} \quad i_j \approx 0,00969\,\%.$$

On note alors que $3,6\,\%/12 \approx 0,3\,\% \approx i_m$ et que $3,6\,\%/365 \approx 0,0099\,\% \approx i_j \ldots$
Il est donc intéressant de faire la comparaison des taux actariels avec les taux proportionnels, puisque ceux-ci sont utilisés dans le court terme. Dans quelle mesure se ressemblent-ils ?

5. Taux proportionnel actualisé, exponentielle

5.1 Comparaisons numériques

Dans le cas général de p périodes par an, avec un taux annuel noté i_a et un taux par période noté i_p, on sait que :

$$i_p = (1+i_a)^{1/p}-1$$

Pour certains cas, on peut dresser alors un tableau comparatif des taux proportionnels (i_{ppr}) et des taux actuariels (i_p) exprimés en % (voir Tab. 1 page 12).
Dans les cours supérieurs on peut montrer que le taux proportionnel est toujours supérieur au taux actuariel, et que l'on a :

$$\boxed{\frac{i_{\text{ppr}}-i_p}{i_p} \approx \frac{p-1}{2p} \cdot i_a} \tag{3}$$

Ainsi par exemple, avec $i_a = 4\,\%$ et $p = 12$:

$$\frac{i_{12\text{pr}}-i_{12}}{i_{12}} \approx \frac{11}{24} \cdot 4\,\% \approx 1,83\,\%$$

Pour montrer que cette évaluation d'erreur est tout à fait précise, on peut faire le calcul de l'approximation réelle en utilisant les données de Tab. 1 :

$$\frac{i_{12\text{pr}}-i_{12}}{i_{12}} \approx \frac{0,33333-0,32737}{0,32737} \approx 1,82\,\%$$

i_a	$i_{12} = i_m$	$i_{12\text{pr}}$	$i_{365} = i_j$	$i_{365\text{pr}}$
2	0,16516	0,16667	0,00543	0,00548
3	0,24663	0,25000	0,00810	0,00822
4	0,32737	0,33333	0,01075	0,01096
5	0,40741	0,41667	0,01337	0,01370
6	0,48676	0,50000	0,01597	0,01644
7	0,56541	0,58333	0,01854	0,01918
8	0,64340	0,66667	0,02109	0,02192
9	0,72073	0,75000	0,02361	0,02466
10	0,79741	0,83333	0,02612	0,02740

TAB. 1 – Taux actuariel vs taux proportionnel

La formule (3) est intéressante car elle montre que l'erreur commise est quasiment indépendante de p : lorsque p est assez grand $(p-1)/(2p)$ est voisin de $1/2$, et plus p est grand, plus $(p-1)/(2p)$ se rapproche de $1/2$.
Ainsi, contrairement à ce qu'on pourrait penser au premier abord, lorsque le nombre de périodes devient de plus en plus grand, le taux proportionnel ne se rapproche pas du taux actuariel, même s'il reste du même ordre de grandeur : on commet donc une erreur relative incompressible de l'ordre de $i_a/2$ lorsqu'on prend le taux proportionnel à la place du taux actuariel.
On peut alors se demander quel est l'effet sur le taux annuel lorsqu'on prend le taux proportionnel à la place du taux actuariel. Cherchons donc à savoir ce qui se passe lorsque p devient aussi grand que l'on veut ; ce qui n'est pas ridicule dans la pratique car les valeurs boursières varient pratiquement de seconde en seconde.

5.2 Passage à la limite, nombre e

En reprenant ce qui précède, on voit bien que si i_a est le taux annuel, alors le taux proportionnel correspondant à p périodes par an est, pour chaque période :

$$i_{p\text{pr}} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{i_a}{p}$$

ce qui donne alors un nouveau taux —actuariel— annuel, i'_a, déterminé par :

$$1 + i'_a = (1 + i_{p\text{pr}})^p = (1 + \frac{i_a}{p})^p$$

Par exemple, pour $i_a = 4\ \%$ et $p = 12$:

$$1 + i'_a = (1 + \tfrac{0{,}04}{12})^{12} \approx 1,0407$$

et donc $i'_a \approx 4,07\ \%$. En faisant de même avec $p = 365$ on obtient :

$$1 + i'_a = (1 + \tfrac{0{,}04}{365})^{365} \approx 1,0408$$

et donc $i'_a \approx 4,08\ \%$. Avec un découpage de l'année moyenne* en heures, on prend $p = 8766$ et on obtient :

*de 365,25 jours

$$1 + i'_a = (1 + \tfrac{0{,}04}{8766})^{8766} \approx 1,0408$$

et donc $i'_a \approx 4,08$ %.

Cette erreur stable de $0,08$ % environ sur le taux actuariel annuel obtenu par rapport au taux annuel initial est cohérente avec ce que nous avions remarqué au § 5.1 : une erreur relative incompressible entre le taux actuariel par période et le taux proportionnel correspondant.
En revanche la stabilité du résultat obtenu lorsque p augmente n'a rien d'évident. Mais on montre dans les cours supérieurs que lorsque p devient de plus en plus grand,

$$(1 + \frac{i_a}{p})^p$$

se rapproche de plus en plus de e^{i_a} où e est un nombre particulier,

$$\boxed{e \approx 2,71828182846}$$

appelé « base des logarithmes népériens », expression qu'on ne peut comprendre qu'en étudiant... les *logarithmes* (voir § 6.2).
Pour l'instant, on retiendra ce résultat de *convergence*, qu'on appelle aussi *passage à la limite*, sous la forme symbolique suivante, valable pour tout nombre réel x

$$\boxed{\lim_{p \to \infty} (1 + \frac{x}{p})^p = e^x}$$

Le lecteur est invité à faire des calculs avec sa calculatrice (avec la touche $\boxed{e^x}$) pour constater ce passage à la limite et noter aussi que lorsque x est petit (disons inférieur ou égal à 0,1) :

$$e^x \approx 1 + x$$

C'est le point de départ à l'introduction d'une nouvelle fonction de référence, indispensable pour la modélisation de nombreux phénomènes évoluant dans le temps.

5.3 Fonction exponentielle

Il existe de nombreuses façons d'aborder la *fonction exponentielle*, notée exp, mais une définition rigoureuse reste réservée aux cours supérieurs. Nous nous contenterons de définir exp par le bais des puissances de e :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : \quad \exp(x) \overset{\text{déf.}}{=} e^x}$$

Remarque. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$.
Numériquement, on peut constater que le taux actuariel correspondant à un taux proportionnel $i_{\text{ppr}} = i_a/p$ sur une fraction d'année vaut quasiment $\exp(i_a) - 1$. C'est à dire (ce que nous avons déjà vu précédemment) :

$$(1 + \frac{i_a}{p})^p \approx \exp(i_a) \tag{4}$$

On peut dresser un tableau avec quelques valeurs pour s'en convaincre (voir Tab. 2 page 14). On remarque alors que (4) nous fournit l'approximation

$$\exp(i_a/p) \approx 1 + i_a/p$$

i_a	$\exp(i_a)$	$(1+i_a/12)^{12}$	$(1+i_a/365)^{365}$
2 %	1,02020	1,02018	1,02020
3 %	1,03045	1,03042	1,03045
4 %	1,04081	1,04074	1,04081
5 %	1,05127	1,05116	1,05127
6 %	1,06184	1,06168	1,06183
7 %	1,07251	1,07229	1,07250
8 %	1,08329	1,08300	1,08328
9 %	1,09417	1,09381	1,09416
10 %	1,10517	1,10471	1,10516

TAB. 2 – Exponentielle vs taux proportionnel actualisé

valable aussi lorsque $p = 1$, mais avec une précision moindre que lorsque $p = 12$ ou $p = 365$. Donc si on utilise les intérêts composés sur n années, on se doute que l'approximation

$$\exp(n \cdot i_a) \approx (1 + i_a)^n$$

qui serait pourtant bien commode pour les calculs, risque d'être trop grossière. Alors, finalement, pour quel réel y a-t-on véritablement $\exp(y) = 1 + i_a$, égalité qui nous permettrait d'écrire

$$\exp(n \cdot y) = (1 + i_a)^n \qquad ?$$

Cette question nous conduit directement à la notion de *logarithme*.

6. Exponentielle et logarithme népérien

6.1 Propriétés de l'exponentielle

En utilisant les connaissances de base sur les puissances, on en tire les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
\exp(x + y) &= \exp(x) \cdot \exp(y) & \text{soit :} \quad & e^{x+y} = e^x \cdot e^y \\
\exp(x - y) &= \exp(x) / \exp(y) & \text{soit :} \quad & e^{x-y} = e^x / e^y \\
(\exp(x))^y &= \exp(x \cdot y) & \text{soit :} \quad & (e^x)^y = e^{x \cdot y} \\
(\exp(x))^{1/p} &= \exp(x/p) & \text{soit :} \quad & (e^x)^{1/p} = e^{x/p}
\end{aligned}$$

6.2 Logarithme népérien

Définition. On appelle logarithme (*népérien*, ou *naturel*) d'un réel positif x, le nombre dont l'exponentielle vaut x. Ce nombre est noté $\ln(x)$ et on retient alors :

$$\boxed{\exp(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln(x)}$$

On a donc en particulier :

$$\exp(y) = (1 + i_a) \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln(1 + i_a)$$

Par la définition précédente, on a de plus, pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\exp(\ln(x)) = x \quad \text{et} \quad \ln(\exp(y)) = y}$$

Le lecteur est invité à vérifier ces égalités sur sa calculatrice.

6.3 Propriétés du logarithme

En utilisant les propriétés de l'exponentielle on en déduit celles du logarithme. Le principe de déduction est donné sur le cas suivant.
Comme

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

On a

$$\exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(a)) \cdot \exp(\ln(b))$$

c'est à dire

$$\exp(\ln(a) + \ln(b)) = a \cdot b$$

d'où

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b).$$

Voici donc ces propriétés :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \ln(a \cdot b) & = & \ln(a) + \ln(b) \\ \ln(a/b) & = & \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(1/x) & = & -\ln(x) \\ \ln(x^p) & = & p \cdot \ln(x) \end{array}}$$

7. Problèmes financiers usuels

Nous rappelons ici les formules essentielles dans le cas usuel où le taux annuel i_a est connu. On exprime la durée d du prêt en années (d n'étant pas forcément un nombre entier) :

Intérêts simples : $C_d = (1 + d\, i_a)\, C$.

Intérêts composés : $C_d = (1 + i_a)^d\, C$.

Annuités (p versements par an) : $A_p = \dfrac{i_p}{1 - (1 + i_a)^{-d}}\, C$.

Taux équivalent : $i_p = (1 + i_a)^{1/p} - 1$ (pour p périodes par an).

7.1 Capital à placer ?

On cherche C :

Intérêts simples :

$$\boxed{C = \frac{C_d}{1 + d\, i_a}}$$

Intérêts composés :

$$\boxed{C = \frac{C_d}{(1+i_a)^d} = (1+i_a)^{-d}\, C_d}$$

Annuités (p versements par an) :

$$\boxed{C = \frac{1-(1+i_a)^{-d}}{(1+i_a)^{1/p}-1}\, A_p}$$

7.2 Durée du placement ?

On cherche d :

Intérêts simples :

$$\boxed{d = \frac{1}{i_a}\left(\frac{C_d}{C}-1\right) = \frac{C_d - C}{i_a\, C}}$$

Intérêts composés :

$$\boxed{d = \frac{\ln(C_d)-\ln(C)}{\ln(1+i_a)}}$$

Annuités (p versements par an) :

$$\boxed{d = -\frac{\ln\left(1-\frac{C}{A}\, i_p\right)}{\ln(1+i_a)}}$$

7.3 Taux d'intérêt du placement ?

On cherche i_a :

Intérêts simples :

$$\boxed{i_a = \frac{1}{d}\left(\frac{C_d}{C}-1\right) = \frac{C_d - C}{d\, C}}$$

Intérêts composés :

$$\boxed{i_a = \left(\frac{C_d}{C}\right)^{1/d} - 1}$$

Annuités (p versements par an) : Pour déterminer i_a dans ce cas, on peut résoudre le problème sur calculatrice ou sur ordinateur, par intersection de la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{d\,p}\cdot\frac{1-(1+x)^{-d}}{(1+x)^{1/p}-1}$$

avec la droite d'équation

$$y = \frac{C}{d\,p\,A}$$

Cette méthode est motivée quand on sait que A est de l'ordre de $C/(d\,p\,A)$, mais plus petit que 1, et aussi parce que[6] :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{d\,p}\cdot\frac{1-(1+x)^{-d}}{(1+x)^{1/p}-1}\right)=1$$

donc on peut toujours travailler dans la bande du plan définie par $0 \leq y \leq 1$.

Exemple. Avec $C = 70000$, $d = 10$, $p = 12$, et $A = 700$, on trouve $i_a \approx 3,8$ %.

[6] c'est démontrable dans les cours supérieurs.

Table des matières